



ベイズ統計学とは? ～身近な事例から, 臨床試験での応用まで

日本製薬工業協会 医薬品評価委員会 データサイエンス部会 監事
イーザイ株式会社 メディカル本部 エビデンス推進部 ディレクター
酒井弘憲, Ph.D.

ベイズ統計学

統計学の流儀

- 頻度主義

フィッシャー, ネイマン, ピアソンらによって確立された検定を中心とした立場.

- **ベイズ主義**

ベイズによって提案された, 確率を「主観的な信念の「度合い」と解釈する立場. ベイズの定理によって「信念」を更新する.

- 尤度主義

客観的な尤度を比較し, データから仮説を評価する立場.

| アプローチ | 特徴 | 主観性 | 使用例 |
|-------|------------------|--------------|-----------------|
| 頻度主義 | 長期的な繰り返し実験に基づく | 低い | 仮説検定, 信頼区間 |
| ベイズ統計 | 事前知識とデータを統合 | 高い (事前分布に依存) | 意思決定, 予測 |
| 尤度主義* | データに対する仮説の適合度を評価 | 低い | モデル比較, 科学的仮説の評価 |

* 尤度主義 :

- 尤度主義は, 「どの仮説がデータに最もよく合っているか」を客観的に評価する方法
- 科学的な仮説検証において, 主観的な判断を排除し, データに基づいた比較を可能にする
- 意思決定よりも, 情報の評価や仮説の選別に向いている

医薬品開発は特殊な世界？

Neyman-Pearson流の帰無仮説，対立仮説を設定し，Fisherの実験計画，ランダム化を実践し，前向きにデータを収集して，仮説検定を実施するという教科書通りの頻度論的なコテコテ統計を実業務で適用・運営できているのは，医薬品の世界くらい

近年，社会科学でもランダム化は「理想的な因果推論手法」として注目されており，特に経済学・心理学・政策評価・マーケティング分野では実践例が増えている。

⇒ 2019年 ノーベル経済学賞：開発経済学のRCT研究
(Banerjee, Duflo, Kremer) など

ただし，医薬品分野ほどの厳密さや制度化は難しく，現場の制約や倫理的配慮が大きな壁となっているのが実情。

The 21st Century Cures Act(2016)

| Subtitle C Modern Trial Design and Evidence Development | |
|---|--|
| Sec. 3021. Novel Clinical Trial Designs. | <ul style="list-style-type: none">• Requires FDA to hold a public meeting and issue guidance documents that would assist sponsors in incorporating <u>adaptive designs and novel statistical modeling</u> into new drug applications. |
| Sec. 3022. Real World Evidence. | <ul style="list-style-type: none">• Requires FDA to evaluate the use of <u>real world evidence</u> to help support the approval of a new indication for a previously approved drug and to help support or satisfy post-approval study requirements. |
| Sec. 3023. Protection of Human Research Subjects. | <ul style="list-style-type: none">• Requires the Secretary of HHS to harmonize differences between the human subject regulations under the Common Rule and the Federal Food Drug and Cosmetic Act.• Streamlines the institutional review board process for trials that are being conducted at multiple sites. |
| Sec. 3024. Informed Consent Waiver or Alteration for Clinical Investigations. | <ul style="list-style-type: none">• Provides FDA the flexibility to waive or alter informed consent requirements for clinical trials with minimal risk, similar to existing flexibility for HHS and NIH under the Common Rule. |

アダプティブデザインや新規統計モデリング（⇒ベイズ流アプローチ）により，臨床試験を合理化・効率化し，試験中の柔軟な意思決定を可能とし，臨床試験の成功確率を改善することが期待される

ベイズ統計学

英国長老派牧師であったThomas Bayesによって提案された統計手法。

18C後半, Bayesの死後に友人のPriceにより業績が発表され, 19CにLaplaceによりその存在が広く知られるようになった。

のちに1950年代にSavageらによって再評価・体系化された。

実生活においては, 身近なところでは, 迷惑メールの発見・分類から, 株や債券のリスク分散のためのポートフォリオ最適化, マーケティング予測や人工知能 (AI) 等までにもBayesの理論が使われている。

ベイズの基本的な考え方

当初の考え + 最近得られた客観的なデータ = より正確な新たな考え

当初の情報のない時点で考えた確率 \Rightarrow 事前確率

観察された客観的データに基づく仮説の確率 \Rightarrow 尤度

客観データによって更新された確率 \Rightarrow 事後確率

数理的に表現すると、事後確率は事前確率と尤度の積に比例する

ベイズ統計の歴史

- 1740年代後半 英国長老派教会の牧師Thomas Bayesが定理を思いつき小論メモを残す
「偶然論においてもっとも困難なある問題の不完全な解：
An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances」
- 1761年 Bayes死去
- Bayesの若き友人 Richard Priceが遺稿を整理
⇒ 1764年 ロイヤルソサエティの哲学紀要に投稿
「偶然論における一問題を解くための試論：
A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances」

A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances

[296]

LII. *A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances, published in the Philosophical Transactions, Vol. LIII. Communicated by the Rev. Mr. Richard Price, in a Letter to Mr. John Canton, M. A. F. R. S.*

Dear Sir,

Nov. 26, 1764.

Read Dec. 6, 1764. I Send you the following *Supplement to the Essay on a Problem in the Doctrine of Chances*, hoping that you may not think it improper to be communicated to the Royal Society. I should not have troubled you again in this way had I not found that some additions to my former papers were necessary in order to explain some passages in them, and particularly what is hinted in the note at the end of the Appendix. "I have first given the deduction of Mr. Bayes's second rule chiefly in his own words; and then added, as briefly as possible, the demonstrations of several propositions, which seem to improve considerably the solution of the problem, and to throw light on the nature of the curve by the quadrature of which this solution is obtained." Perhaps, there is no reason for being very anxious about proceeding to further improvements. It would, however, be very agreeable to me to see a yet easier and nearer approximation to the value of the two series's in the first rule: but this I must leave abler persons to seek, chusing now entirely to drop this subject.

The

**Issue 54,
31 December 1764,
*Philosophical Transactions***

- 1774年 Pierre-Simon Laplaceが独自にベイズ的な原理を思いつく。その後, Bayesの発見を知り, 論文で最初の発見者としてBayesに言及。1810年~1814年頃にベイズ統計を発展・体系化させる。
(1810年 中心極限定理の発見)

- Laplaceの死後, Laplace批判が起こる

⇒ ●Laplaceは他人の業績を横取りした
(De Morgan)

●不確かさの数学である確率論は知性の逸脱
(John Stuart Mill)

⇒ いずれも不当な言いがかり (ナポレオン政権での内務大臣経験などへの反発か?)



Pierre-Simon Laplace
1749 - 1827

- フランス軍の砲術の教科書（1880年代から第二次世界大戦まで約60年間）でベイズ統計を推奨（Joseph Louis François Bertrand）
 - ⇒ ドレフェス事件（1894：反ユダヤ主義によるスパイ容疑の冤罪事件）で Jules-Henri Poincaré がベイズの法則を持ち出してドレフェスに有利な証言。
起訴の根拠は粉碎されたが裁判官は面子のために刑期を短縮した有罪判決。
民衆の猛反発により大統領恩赦。
ドレフェスはのちに昇進し、レジオン・ド・ヌール勲章も受賞
- 1914年 第一次大戦中 弾薬の品質検査にベイズの法則が利用される
 - ⇒ 第二次世界大戦中にオペレーションズ・リサーチとして再発見
 - ⇒ AT&T社の電話回線制御にも活用
- Karl Pearson
当時は、統計学者の使えそうなツールがほかにほとんどなかったため、
「**実際的な人間であれば、よりよい手段が登場するまではベイズ流の逆確率の結果を受け入れることになる**」
としぶしぶ容認

参考：ドレフェス事件

パリのドイツ大使館で掃除婦に扮したフランスの女スパイが1枚の捨てられていたメモを回収 → フランス軍の秘密が記載されていた → 軍内の魔女狩りの結果、ユダヤ系のドレフェス大尉に嫌疑がかけられた → 軍法会議で資格のない筆跡鑑定家ベルティヨンの証言が採用されてしまう → メモの単語のペン運びのくせについて、単語の始まりと終わりのペン運びが似ている確率が1/5で、26回繰り返し出てくる単語の始点と終点に4つの類似が認められるが、そのようなことが起こる確率は $(1/5)^3$ でこのようなことは通常起こりえないので、わざと慎重になされたものであって、それはおそらく秘密暗号であると主張 → 反対証人のポアンカレは、ベルティヨンの計算は間違いであることを指摘 → 26個の単語の始まりと終わりのうち4つが一致する確率ではなく、4つの単語で4か所が一致する確率になっている → 4つ以上の一致がある確率は8/10くらいになり、ごくありふれた事象であることを証言

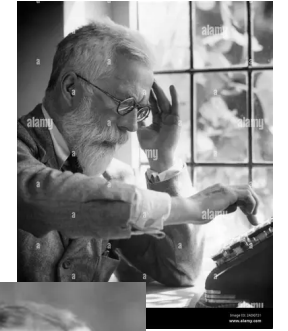
ポアンカレが作成した鑑定報告書は「確率論・推計学的な誤り」を徹底的に指摘しているが、“ベイズの定理そのもの”を明示的に使用しているわけではない。ただし、議論にはベイズ的発想に近い「原因の確率 (probabilité des causes)」の概念が含まれており、現代の視点で見れば“ベイズ的推論の問題”を扱っていたと言える。

ポアンカレ予想：「3次元の閉じた多様体（境界がなく、有限で、連結な空間）が単連結であるなら、それは3次元球面 (3-sphere) と同相である」

3次元空間の構造を理解するための基本問題で、トポロジーの核心に関わる命題。

100年以上未解決で、数学界の「ミレニアム問題」の一つであったが、2003年、ロシアの数学者 グリゴリー・ペレルマン がリッチフローを用いて証明した。この功績でフィールズ賞が授与されたが、ペレルマンが賞を辞退したことで話題になった。

● Ronald Aylmer Fisher ⇒ 徹底的なベイズ批判
「ベイズは光も通さぬジャングルであって、誤り。おそらくは数学界がこれほど深く
かかわってしまったただ一つの誤りだ」



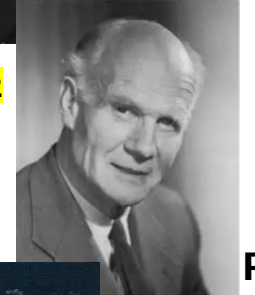
Fisher

● Jerzy Neyman ⇒ ベイズの批判 「事前確率が均等だとするベイズの
近道は容認できない」



Neyman

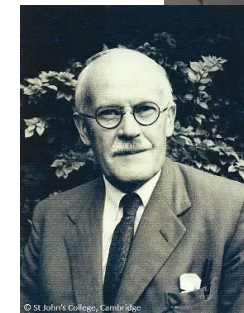
● Egon Sharpe Pearson ⇒ ベイズ容認
1925年 ベイズ・ラプラスの手法に関するラプラス以降110年でもっとも
広範なベイズに関する研究を発表



Pearson

● 1939年 Harold Jeffreys
「確率の理論： *Theory of Probability*」
ベイズの体系化，近代的なベイズ統計の創始者
⇒ Fisherによる猛批判 （しかし，2人は親友）地球物理学者の立場で
大陸移動説には生涯懐疑的であった。

Bayes' theorem examined in the light of experimental sampling., *Biometrika*(17) 388-442



Jeffreys

● 20世紀初頭 量子力学の台頭
⇒ 利用されたのはフィッシャー流の頻度論

Bayes' theorem examined in the light of experimental sampling

BAYES' THEOREM, EXAMINED IN THE LIGHT
OF EXPERIMENTAL SAMPLING.

By EGON S. PEARSON, M.A.

1. IN reading from the long succession of papers, and chapters in books on the theory of probability that have been written on the problem of "inverse probabilities" during the last century and a half, it is difficult not to be struck by the absence of any systematic attempt to put the theoretical rules to the test. Both the supporters and detractors of what has been termed Bayes' Theorem have relied almost entirely on the logic of their argument; this has been so from the time when Price*, communicating Bayes' notes to the Royal Society, first dwelt on the definite rule by which a man fresh to this world ought to regulate his expectation of succeeding sunrises, up to recent days when Keynes† has argued that it is almost discreditable to base any reliance on so foolish a theorem. Such appeals to experience as have been made are of little final value; Venn‡ it is true realised that the rule could not be tested by single instances but only in the long run of experience, yet after giving three unfavourable cases he was content to leave matters with the assurance that the experimenter "could hardly fail" to find himself "grossly wrong" if he based his expectation on the rule in further trials. The main reason why the critics have failed to produce any solid evidence in favour of their contentions, is perhaps because they have felt that the "equal distribution of ignorance" and the "distribution of *a priori* probabilities" are conceptions too intangible and unreal to be brought to the test of numbers, but the supporters of the theory can have no excuse for leaving matters as they stand except the plea of the time and labour involved in collecting data. If Bayes' Theorem is of practical value to the statistician it must be possible to show by a series of *ad hoc* experiments that the predictions which it makes are in fact justified. My excuse therefore in returning to this much and long discussed subject is to describe the results of a long series of experimental samplings which have been carried out at intervals during the last four years with a view to making more clear the use and the limitations of Bayes' Theorem in the field of practical statistics. But before dealing with the experiments it will be helpful to consider certain aspects of the problem from the theoretical point of view.

According to Price§, Bayes originally reached his result by a "very ingenious solution" based on the supposition that "the chance was the same that the prob-

* *Phil. Trans.* Vol. LIII. 1763, p. 370 *et seq.*

† *A Treatise on Probability*, 1921, p. 382.

‡ *The Logic of Chance*, 1876, p. 180.

§ *loc. cit.*

Egon Pearsonの大部の論文

Biometrika (17) 388-442, 1925

●第二次世界大戦 ドイツ軍の脅威によるイギリス軍の苦悩

⇒ ドイツ軍の堅牢なエニグマ暗号

⇒ Alan Mathison Turingによる暗号解読

⇒ ベイズの法則を利用：暗号ホイールの組み合わせ*の絞り込みの効率化
エニグマの設定を突きとめるということは、原因の逆確率の古典的問題
手がかり：毎朝同時刻に挨拶と天気予報を告げることを察知



Alan Turing

*: $26! = 403,291,461,126,605,635,584,000,000$ 通り

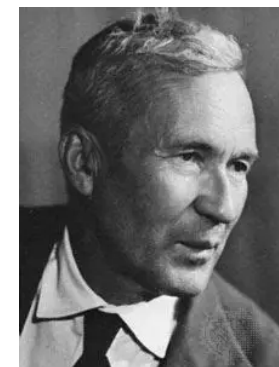
↑
兆の100兆倍

↑
兆



●ロシアにおける軍用統計学としてのベイズ統計

⇒ 1941年 Andrei Nikolaevich Kolmogorovによりモスクワ国立
大学での戦時下講座でベイズを確率専攻の学生の必須科目とする



Andrei Kolmogorov

- 第二次世界大戦終結時点では、戦時下でのTuringらの華々しい成功事例は機密扱いされていた（彼自身が同性愛罪で逮捕されたことも）ため、ベイズの法則は怪しげなものともみなされていた（2009年 英国政府の公式謝罪と名誉回復 ⇒ 2019年 50ポンド紙幣の肖像として採用）
- 1950年代～60年代に発表された論文のほとんどは頻度論に関するもの
- ベイズ派の反撃
アクチュアリー
1950年 Arthur L. Bailey（保険数理士）によるベイズの再評価
「クレディビリティの手順：ラプラスによるベイズの法則の一般化と付随知識と観察で得られたデータの組み合わせについて - Credibility procedures: Laplace's generalization of Bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data」
- ベイズを体系化し哲学とした3人：
Irving John Good, Leonard Jimmie Savage, Dennis Victor Lindleyによる
ベイズの再興 ⇒ Neo-Bayesian

Credibility procedures: Laplace's generalization of Bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data

CREDIBILITY PROCEDURES

7

CREDIBILITY PROCEDURES
LAPLACE'S GENERALIZATION OF BAYES' RULE
AND THE COMBINATION OF
COLLATERAL KNOWLEDGE WITH OBSERVED DATA

BY ARTHUR L. BAILEY

"If thou canst believe, all things are possible
to him that believeth."

Mark 9:23

The casualty insurance business has used credibility formulas or procedures for many years in making rates or in experience rating plans. These formulas have been used to determine the weight to be given to the indications of actual observations in a combination of such indications with *a priori* expectations which were based either on other actual data, on prior knowledge or on reasonable assumptions made before actual observations were available. Such formulas have invariably provided that the weight to be given to actual observations increase as the volume of such observations increases.

Last December the discussion of a paper by Mr. T. O. Carlson, entitled "Statistical and Actuarial Procedures in Liability Insurance"*[1], pointed out that casualty insurance underwriters and actuaries believe that they are not devoid of knowledge before they have acquired any statistics from observed data, and that this belief results in the use of credibility formulas to produce weighted averages of that prior knowledge and the information provided by the observed data. The remarks made at that time were general and unsupported by any demonstration. In fairness to other statisticians and to students of casualty insurance, it appears desirable to present a complete development from basic principles to show exactly the basis upon which credibility formulas rest and to make evident the point at which the classical statistical theory, particularly that of statistical estimation, departs from that used by casualty actuaries.

The basis for these credibility formulas has been a profound mystery to most people who have come in contact with them. The actuary finds them difficult to explain and, in some cases, even difficult to understand. Paradoxical as it may be, the more contact a person has had with statistical practices in other fields or the more training a person has had in the theory of mathematical statistics, the more difficult it has been to understand these credibility procedures or the validity of their application.

The credibility formulas for casualty insurance have been accepted in the past, and continue to be accepted at the present time, because it appears to most people to be logical and reasonable to give the indications of a large volume of data more consideration or weight than the indications of a small volume of data. How much weight the indications of specific volumes of data

* Numerals in brackets refer to the References at the end of this paper.

Baileyの論文

**Vol. XXXVII, Page 7-23, 1950,
*Proceedings of the Casualty
Actuarial Society***

Neo-Bayesian

- Irving John Good ⇒ 戦時中, Alan Turingの助手

1950年「確率と証拠の重みづけ: Probability and the weighing of Evidence」

～ Turingの許諾のもと彼の着想の細かなところまでを理論展開



- Leonard Jimmie Savage

1954年「統計学の基礎: The Foundations of Statistics」

これまでにないもっとも極端なベイズの擁護者

ノーベル経済学賞Milton Friedman :

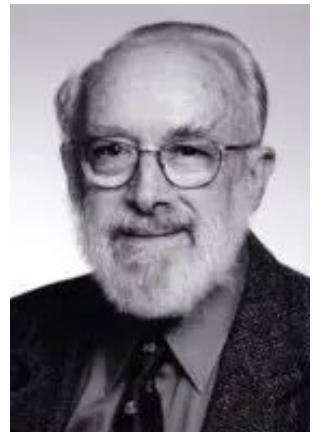
Savageはこれまで自分が会ってきた人の中で間違いなく天才とよべる数少ない一人である



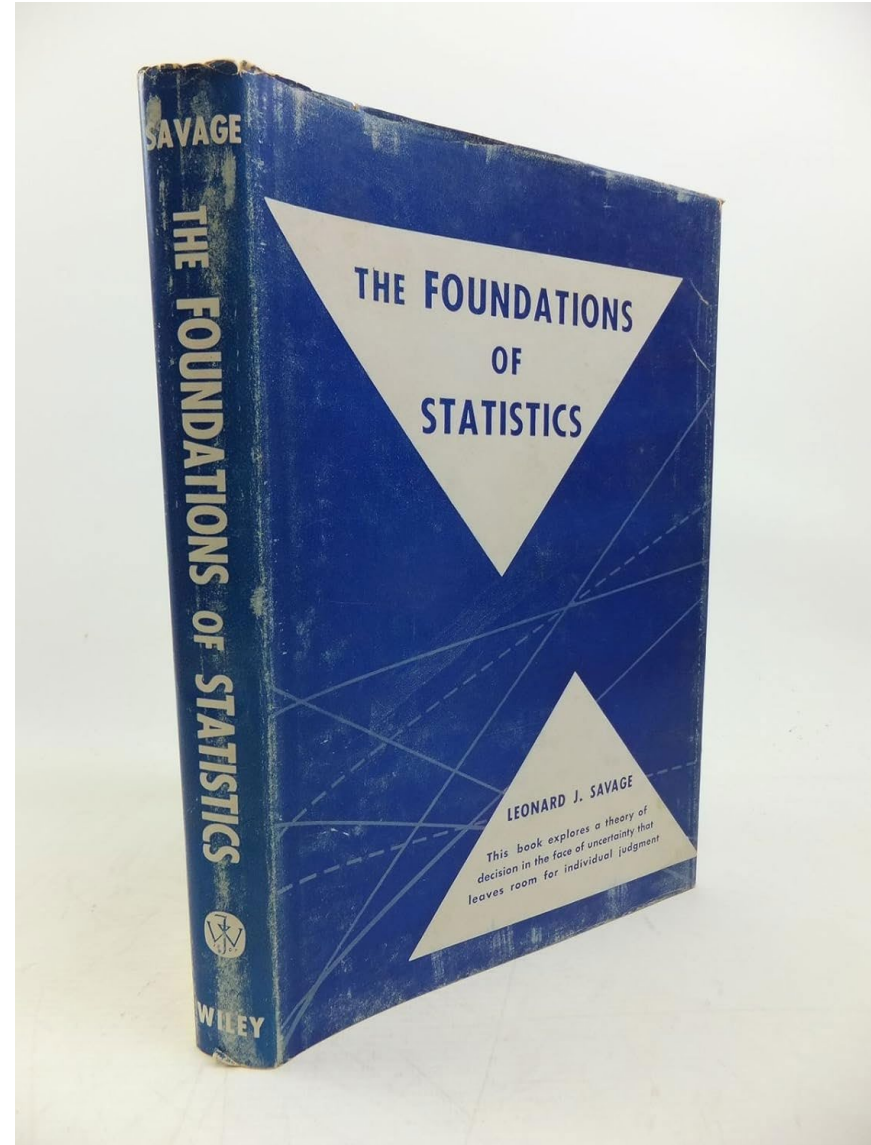
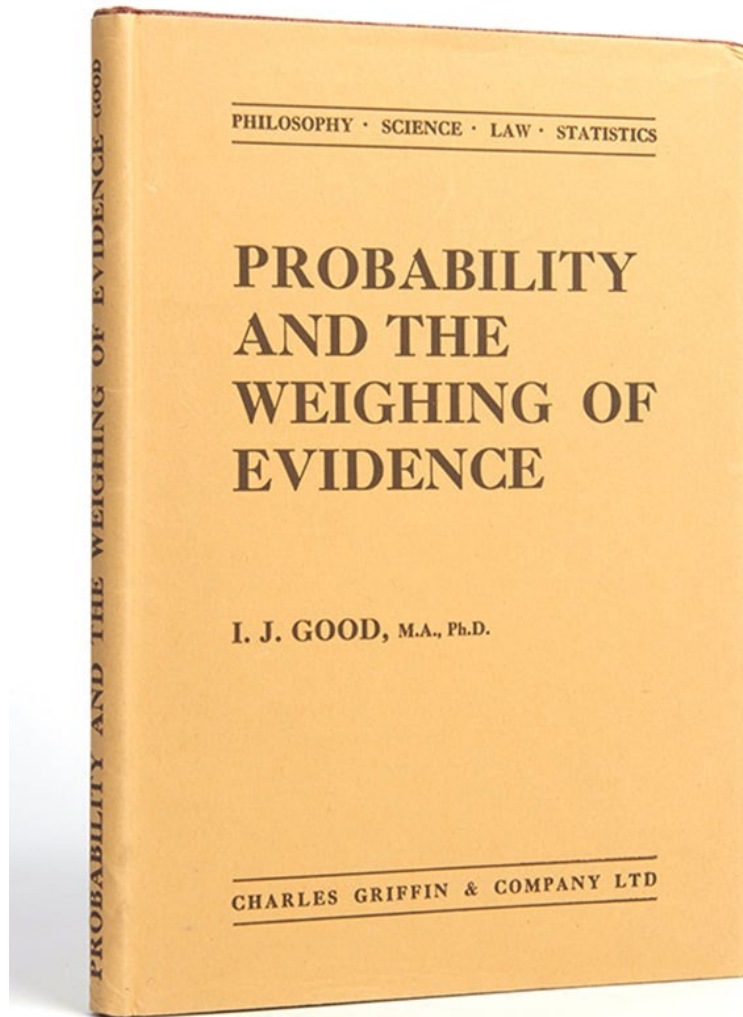
- Dennis Victor Lindley

ユニバーシティ・カレッジ・ロンドンにベイズ派の強力な研究グループを開設。その後, 英国内10拠点にベイズ派の学部を次々に設置。

「ベイズの統計学は統計学の一分野ではなく, 統計学全体をみる視点である」



GoodとSavageの著作



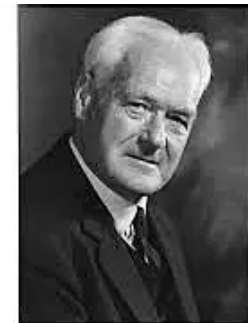
医学研究におけるベイズの導入

●第二次世界大戦後の肺がんの急激な増加

1950年 Austin Bradford Hill と Richard Dall
によるがんとたばこの関係を調べたケース・コントロール
研究 ⇒ たばこは肺がんの強力な危険因子である
ことが証明される



Dall



Hill

同年実施されたアメリカでの研究でも同じ結果が得られる

- 1951年 Jerome Cornfield*がベイズの法則を用いてDallとHillのケース・コントロール研究の結果について数学的裏付けを行う
- FisherやNeymanら反ベイズ派は猛反発したが、Cornfieldは淡々と反論



* : Cornfieldは正規の統計教育は受けず、農務省の研修所で統計について学んだだけであった。当時の所長が Edwards Demming (日本の品質管理の父) .
Cornfieldは、Framingham試験(1962)でロジスティック回帰を開発したことで有名だが、歴史学の学士号しかもたず、統計のPh.Dは持たなかった

Smoking and Carcinoma of the Lung

BRITISH MEDICAL JOURNAL

LONDON SATURDAY SEPTEMBER 30 1950

SMOKING AND CARCINOMA OF THE LUNG

PRELIMINARY REPORT

BY

RICHARD DOLL, M.D., M.R.C.P.

Member of the Statistical Research Unit of the Medical Research Council

AND

A. BRADFORD HILL, Ph.D., D.Sc.

Professor of Medical Statistics, London School of Hygiene and Tropical Medicine; Honorary Director of the Statistical Research Unit of the Medical Research Council

In England and Wales the phenomenal increase in the number of deaths attributed to cancer of the lung provides one of the most striking changes in the pattern of mortality recorded by the Registrar-General. For example, in the quarter of a century between 1922 and 1947 the annual number of deaths recorded increased from 612 to 9,287, or roughly fifteenfold. This remarkable increase is, of course, out of all proportion to the increase of population—both in total and, particularly, in its older age groups. Stocks (1947), using standardized death rates to allow for these population changes, shows the following trend: rate per 100,000 in 1901–20, males 1.1, females 0.7; rate per 100,000 in 1936–9, males 10.6, females 2.5. The rise seems to have been particularly rapid since the end of the first world war; between 1921–30 and 1940–4 the death rate of men at ages 45 and over increased sixfold and of women of the same ages approximately threefold. This increase is still continuing. It has occurred, too, in Switzerland, Denmark, the U.S.A., Canada, and Australia, and has been reported from Turkey and Japan.

Many writers have studied these changes, considering whether they denote a real increase in the incidence of the disease or are due merely to improved standards of diagnosis. Some believe that the latter factor can be regarded as wholly, or at least mainly, responsible—for example, Willis (1948), Clemmesen and Busk (1947), and Steiner (1944). On the other hand, Kennaway and Kennaway (1947) and Stocks (1947) have given good reasons for believing that the rise is at least partly real. The latter, for instance, has pointed out that "the increase of certified respiratory cancer mortality during the past 20 years has been as rapid in country districts as in the cities with the best diagnostic facilities, a fact which does not support the view that such increase merely reflects improved diagnosis of cases previously certified as bronchitis or other respiratory affections." He also draws attention to differences in mortality between some of the large cities of England and Wales, differences which it is difficult to explain in terms of diagnostic standards.

The large and continued increase in the recorded deaths even within the last five years, both in the national figures and in those from teaching hospitals, also makes it hard to believe that improved diagnosis is entirely responsible. In short, there is sufficient reason to reject that factor as the

whole explanation, although no one would deny that it may well have been contributory. As a corollary, it is right and proper to seek for other causes.

Possible Causes of the Increase

Two main causes have from time to time been put forward: (1) a general atmospheric pollution from the exhaust fumes of cars, from the surface dust of tarred roads, and from gas-works, industrial plants, and coal fires; and (2) the smoking of tobacco. Some characteristics of the former have certainly become more prevalent in the last 50 years, and there is also no doubt that the smoking of cigarettes has greatly increased. Such associated changes in time can, however, be no more than suggestive, and until recently there has been singularly little more direct evidence. That evidence, based upon clinical experience and records, relates mainly to the use of tobacco. For instance, in Germany, Müller (1939) found that only 3 out of 86 male patients with cancer of the lung were non-smokers, while 56 were heavy smokers, and, in contrast, among 86 "healthy men of the same age groups" there were 14 non-smokers and only 31 heavy smokers. Similarly, in America, Schrek and his co-workers (1950) reported that 14.6% of 82 male patients with cancer of the lung were non-smokers, against 23.9% of 522 male patients admitted with cancer of sites other than the upper respiratory and digestive tracts. In this country, Thelwall Jones (1949—personal communication) found 8 non-smokers in 82 patients with proved carcinoma of the lung, compared with 11 in a corresponding group of patients with diseases other than cancer; this difference is slight, but it is more striking that there were 28 heavy smokers in the cancer group, against 14 in the comparative group.

Clearly none of these small-scale inquiries can be accepted as conclusive, but they all point in the same direction. Their evidence has now been borne out by the results of a large-scale inquiry undertaken in the U.S.A. by Wynder and Graham (1950).

Wynder and Graham found that of 605 men with epidermoid, undifferentiated, or histologically unclassified types of bronchial carcinoma only 1.3% were "non-smokers"—that is, had averaged less than one cigarette a day for the last 20 years—whereas 51.2% of them had smoked more than 20 cigarettes a day over the same

Doll & Hillの論文

**Br Med J. 1950 Sep
30;2(4682):739-48.**

- 1959年 診断へのベイズの法則の応用の検討
(Robert S. Ledley, Lee B. Lusted.,
Reasoning Foundations of Medical Diagnosis, *Science*)
- 1961年 小児心臓外科医 Homer Richards Warnerによる世界初の症例診断用コンピュータ・プログラム開発
- 現在, CTやMRI画像の処理 (ノイズ除去によるぼけやゆらぎの修正) にもベイズの手法が取り入れられている

●1972年 Dennis Lindley, Adrian Smithによる階層ベイズモデルの提唱

⇒ 従来のベイズモデルでは扱えなかった高次元パラメータの複雑なモデルが扱えるように

⇒ 1972年当時では、複雑な計算をこなせるだけの計算機がなく、普及の障害となった
(事後分布の計算が困難)

⇒ 1990年以降、MCMCの応用、コンピュータの発展により、階層ベイズモデルが実用化される

●1990年 Alan Gelfand, Adrian SmithによるMCMCの提唱

⇒ MCMC: Markov chain Monte Carlo

マルコフ連鎖 : 未来の状態は現在の状態だけで決まり過去の状態は無関係である

モンテカルロ法 : 乱数を用いてシミュレーションや数値計算をするための方法

(もともと、量子力学で中性子のふるまいを計算するために考案)

- 1989年 ケンブリッジ大学教授David Spiegelhalterが**BUGS**（ギブス・サンプリングを使ったベイズ統計）プログラムを開発し、無料公開
⇒ 一気にベイズ利用が拡大



David Spiegelhalter

- 医学研究でのベイズの実践・推進

Donald Arthur Berry

テキサス大学MDアンダーソンがんセンター生物統計学教授

Berry Consultants, LLCを設立し、息子Scott Berryとともにコンサルテーション実施



Don Berry

- 1994年 ノーベル経済学賞 : John Nash

ゲーム理論のナッシュ均衡 ⇒ ベイズの法則の帰結

映画 : Beautiful Mind (統合失調症に苦しむ)

- 1987年 超新星爆発に伴うニュートリノの検出にベイズを応用

Thomas Loredo ⇒ 天文統計学

- Bill Gates

1996年 「**自社が競争優位に立っているのはベイズ統計によるものだ**」

2001年 「**21世紀のマイクロソフトの戦略はベイズ統計であり、世界中からベイズ統計の研究者をヘッドハンティングした**」

- 現在, 機械翻訳, 迷惑メールの発見・分類 (スパムフィルター) から, 株や債券のリスク分散のためのポートフォリオ最適化, マーケティング予測や人工知能 (AI) 等等さまざまな分野でベイズ統計が用いられている



John Nash

身近なベイズ統計学

ベイズ統計学を体験しよう：美味しいレストラン選び

多くの人々が、お店選びにネットやガイドブックを利用されていると思われる。

例えば、あるガイドブックを参考に、まだ行ったことのないレストランに行くことを仮定する。

果たして、そのレストランはあたりか？はずれか？



注：数理的に正確でないところもあるが直感的に理解することに重きをおいている

このガイドブックでは3つの星の数でレストランをランク付けしていて、これから行こうとしているレストランには、サービス、料理の質ともに3つ星がついているとする。

しかし、ガイドブックの取材のときだけ店のスタッフが取り繕ってよい評価をつけてもらっている可能性も疑われる。

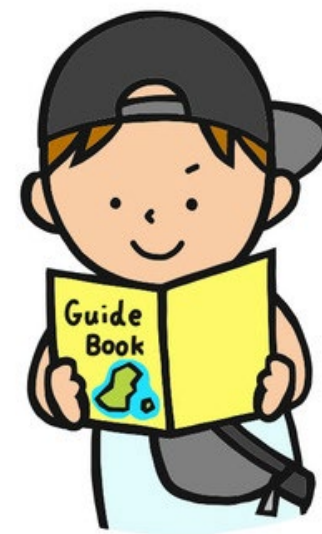
(疑うことが科学の基本である！)

そこで、

本当に印象のよいレストランかどうかはせいぜい4割の

確率 (A) とみて、6割は誇張記事 (つまり盛っている) (B)

であると厳しめに考えることにする。



これまでの経験で何の予備知識もなくレストランにフラリと入った場合、
最初のスタッフの対応が好印象であると、その店の料理が美味しいという確
率を8割（C）としておく。

（逆に印象が良くてもまずい料理を出す確率は2割）

その店のスタッフの最初の印象はよくないけれど料理は美味しいという場合も
あるのでその確率を3割（D）とする。

（印象が悪くてまずい料理を出す確率は7割）

A : 本当に印象のよいレストランかどうかはせいぜい4割の確率

B : 6割は誇張記事 (つまり盛っている)

C : 最初のスタッフの対応が好印象であると, その店の料理が美味しいという確率を8割 (逆に印象が悪くてもまずい料理を出す確率は2割)

D : その店のスタッフの最初の印象はよくないけれど料理は美味しいと言う場合もあるなのでその確率を3割 (印象が悪くてもまずい料理を出す確率は7割)

そのガイドブックを見て始めて入ったレストランが印象もよく, しかも美味しい料理を出してくれ, 大満足したとすると, その確率 (条件付き確率, ベイズの定理) は以下のように64%と計算される.

$$\frac{A \times C}{(A \times C) + (B \times D)} = \frac{0.4 \times 0.8}{(0.4 \times 0.8) + (0.6 \times 0.3)} = 0.64$$

もし事前情報がなければ,

行き当たりばったりで入るレストランの印象がよいか悪いかの確率は0.5, 美味しいものを出すかどうかの確率も0.5

なので, そのレストランが, 好印象で料理も美味しいという確率は
 $0.5 \times 0.5 = 0.25$

つまり, ガイドブックを見てお店を選んだ方が, 事前情報なしに選ぶよりも2倍以上高い確率で美味しいお店に巡り合えるということになる.

ある程度の事前情報がわかっているならば、このガイドブックに対する信頼性という意味でやや批判的にせいぜい0.4とみていた確率（事前分布）が自分の経験を通して0.64に上昇しているのです。次回、別のレストランに行くときにこのガイドブックを参考にすると、印象がよく、美味しい料理を出すレストランに当たる確率は、先ほどと同じ前提で計算すると0.64よりさらに上がって

$$\frac{0.64 \times 0.8}{(0.64 \times 0.8) + (0.36 \times 0.3)} = 0.83$$

となる。

83%の確率でそのレストランが当たりと考えられるのであれば、そのガイドブックを信じて、はじめてのお店でも安心して足を運ぶことができるだろう。



このように、事前の情報を逐次新たなデータの情報によって更新していくのがベイズ統計学の特徴である。

モンティ・ホール問題

これは、**「モンティ・ホール問題」**と呼ばれる有名な事例。

米国のモンティ・ホールという司会者が受け持つクイズ番組のなかで、3つのドアから高級車を当てるというもの。

1つのドアのうしろには高級車が、それ以外の2つのドアのうしろにはハズレの山羊がいる。

当たりのドアを選べば、その高級車が自分のものになるという簡単なルール。

モンティ・ホールとクイズ“Let's Make a Deal”



まず挑戦者がドア①を選択した。

ショーを面白くするためモンティ・ホールがドア②を開けるとそこには山羊がいた。

モンティは挑戦者に最初に選んだドア①ではなくドア③も選択し直してもよいと告げる。

さて、

挑戦者はドア①のままにするか、
ドア③を選び直したほうが得か？

という問題である。

この問題を知らない人は考えてみましょう



この場合、多くのひとは、

司会者がドア②を開けた時点で、ドア①かドア③の2つしか選択肢がなくなっているのだからドア③のままで高級車がもらえる確率は $1/2$ であると考える。

これを直感解とよぶ。

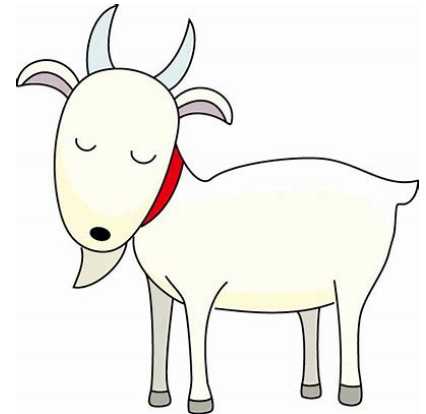
この問題を前述のレストランの式に当てはめて考えてみよう。



司会者がドア②を開ける前にドア①, ③が高級車である事前確率はそれぞれ1/3であることは間違いない。

高級車がドア③に入っているとすると, 司会者がドア③を開けるとそれで番組は終わってしまうので, 必ず司会者はドア②を選ぶ。

したがって「ドア③が高級車のときに司会者がドア②を開けてそれが山羊である確率」は1となる。



回答者が最初に選んだドア

分子は 「ドア①が高級車のとき司会者がドア②を開ける確率」* × 1/3

分母は 「ドア①が高級車のとき司会者がドア②を開ける確率」× 1/3 と 「ドア③が高級車のときに司会者がドア②を開けてそれが山羊である確率」× 1/3 の足し算となる。

ドア①は開けられないので②一択なので 1

* : 「ドア①が高級車のとき司会者がドア②を開ける確率」は、条件として与えられていないので誰にも決められないため、仮に「ドア①が高級車のとき司会者がドア②を開ける確率」と「ドア③が高級車のとき司会者がドア②を開ける確率」を等しいと仮定して 1/2 とおくと、

$$\frac{1/2 \times 1/3}{(1/2 \times 1/3) + (1 \times 1/3)} = 1/3$$

つまり、ドア①が当たりである確率は $1/3$ となり、この $1/3$ を模範解とよぶ。

ドア③が当たりである確率は $1 - 1/3 = 2/3$ となるので、挑戦者は、ドア①に留まるよりもドア③に移動したほうが2倍の確率で高級車をもらえて得するという結論になるわけである。



数式でごまかされていると思うひとへ

最初に選ぶドアは 1 だとする.

| パターン | ドア 1 | ドア 2 | ドア 3 | 司会者の ドアの選択 | 変更せずに ドア1に留 まる場合 | 他のドアに 変更した場 合 |
|------|---|--|--|-----------------------|------------------------|---------------------|
| (A) |  | ハズレ | ハズレ | ドア2か3 を任意に 選択する | 勝利 | 敗北 |
| (B) | ハズレ |  | ハズレ | かならずド ア3を選択 する | 敗北 | 勝利 |
| (C) | ハズレ | ハズレ |  | かならずド ア2を選択 する | 敗北 | 勝利 |
| 勝率 | --- | --- | --- | --- | 1/3 | 2/3 |

パターン(A)(B)(C)の出現率は、確率的に1/3ずつである。また、パターン(A)において、司会者が2か3どちらを選んでも、プレイヤーは「変更するか変更しないか」の選択肢しかないため、この3パターンで説明できる。

このように多くのひとは経験（統計の世界では**事前分布**とよぶ）に基づき修正を重ねた行動を取っているものである。

このような考えをベースにした統計手法がベイズ統計学（ベイジアン）と呼ばれ、社会のさまざまな分野で活用されている。

簡単に言えば、「**未来を知ろうとすれば過去を振り返る必要がある**」ということである。

医薬の世界では許認可が絡むので、どうしても白か黒かをはっきりさせるために「検定」中心のネイマン-ピアソン流の頻度論が主流の考え方（平たく言えば、P値が事前に設定した有意水準0.05を上回るか（黒）、下回るか（白）だけで判断を下す）になっている。

しかし、実際の診療の現場を含め実生活では、事前情報に基づいた行動をとっていることが多く、臨床現場でも、検査・診断などではベイズ統計学が応用されている。

医薬品開発の場面でも探索的段階におけるアダプティブデザイン、がん第I相試験において最適投与量を検討するCRM（Continual Reassessment Method）や診断学などでベイズ統計学が使われている。

ベイズ統計の特徴／Pros.

| 特徴 | 説明 |
|------------|---|
| 直感的な確率解釈 | 「確率 = 信念の度合い」として扱えるので、個人の判断や意思決定に使いやすい。 |
| 情報の更新が可能 | 新しいデータが得られるたびに、事前確率 → 事後確率へと柔軟に更新できる。 |
| 個別対応が得意 | 患者の年齢や症状など、個人の背景情報を反映した確率推定ができる。 |
| 小規模データでも有効 | データが少なくても、事前知識を活用して推定が可能。 |
| 複雑なモデルに強い | 隠れ変数や階層モデルなど、複雑な構造にも対応しやすい。 |
| 意思決定に向いている | 医療、裁判、マーケティングなど「不確実な状況での判断」に強い。 |

ベイズ統計の特徴／Cons.

| 特徴 | 説明 |
|--------------|------------------------------------|
| 事前分布の選び方が難しい | 主観が入るため、どんな事前分布を使うかで結果が変わることも。 |
| 計算が複雑 | 特に多変量や非線形モデルでは、MCMCなどの高度な手法が必要になる。 |
| 理解に時間がかかる | 頻度論に慣れている人には、確率の解釈が直感的でないことも。 |
| 事前情報がないと不安定 | 事前分布が不適切だと、結果が偏るリスクもある。 |
| 結果の解釈が難しい場合も | 「信念の確率」としての解釈が、実務で混乱を招くこともある。 |

まとめ

ベイズ統計は…

- 少ないデータでも柔軟に推定できる
- 個人の状況に応じた判断ができる
- ✗ 事前分布の選び方と計算が難しい
- ✗ 統計初心者にはややとっつきにくい

Bayesのお墓

Bayesのお墓は、ロンドンの金融街シティ近く、地下鉄のムーアゲート駅（サークル線／メトロポリタン線／ハマースミス線／ノーザン線）とオールドストリート駅（ノーザン線）のちょうど中間あたりに位置するバンヒル・フィールド墓地に苔むして佇んでいる。（道筋にあるイタリアンがおいしい）同墓地には、ロビンソン・クルーソーの作者Daniel Defoeの立派なお墓も建っている。



Thank you for your attention